- Nom des élèves :
  - Aicha Mohamed Lemane 1744
  - Meimoune Abdoullah Lemane 1745
  - Sabah Alghasme 1589

- Ecole : Elmaarif

classe : $7C_1$

Exercice 1

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\dfrac{x+x^2+...+x^{2015}-2015}{x-1}$

Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^k-1}{x-1}$, $(k\in IN^*)$ en déduire $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

-Solution : 1 -Methode 1 :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}=\frac{1^k-1}{1-1}=\frac{0}{0}\ F.I$$

* On pose $g(x)=x^k \Rightarrow \begin{cases} g(1)=1 \\ g'(x)=k.x^{k-1} \\ g'(1)=k \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(x)=K$$

-Methode 2 :

On a : $\boxed{\begin{aligned}&1+x+x^2+\dots+x^n\\&=1\times\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\end{aligned}}$

$$\Rightarrow 1+x+\dots+x^{k-1}=\frac{x^k-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}\right)$$

$$=1+1+1+\dots+1=k$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}-2015}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\dots+x^{2015}-2015}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^1-1}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}+\dots+\frac{x^{2015}-1}{x-1}\right]$$

$$=(1+2+\dots+2015)=\frac{2015}{2}(1+2015)=2015\times 1008$$

Exercice 2

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}$.

Démontrer que f admet un prolongement par continuité g au point $x_0=0$.
Préciser g(x).

- Solution :

$f(x)=\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}$

⊗ $0 \notin D_f$

* $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}=\frac{(0+1)^{2015}-1}{0}=\frac{0}{0}$ F.I

- Lever de l'indetermination :

Soit $u(x)=(1+x)^{2015} \Rightarrow$

$$\begin{cases} u(0)=1 \\ u'(x)=2015(1+x)^{2014} \\ u'(0)=2015 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{u(x)-u(0)}{x-0}$

$=u'(0)=2015 \in \mathbb{R}$

- Donc f admet un prolongement par continuité en 0 :

- Ce prolongement est :

$$\begin{cases} g(x)=f(x)\ ,\ \forall x\in D_f \\ g(0)=2015 \end{cases}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^4-\frac{4}{x}$.

Démontrer que l'équation $f(x)=\sin x$ admet une solution dans l'intervalle $[1,2]$.

-Solution : 3

$f(x) = x^4 - \frac{4}{x}$

$f(x) = \sin x$ admet une solution sur $I=[1,2]$

$\Leftrightarrow$ Montrons que $f(x) - \sin x = 0$ admet une solution I.

soit $h(x) = f(x) - \sin x$

$h(x) = x^4 - \frac{4}{x} - \sin x$

$\Rightarrow$ h est continue sur $I=[1,2]$

$h(1) = 1^4 - \frac{4}{1} - \sin 1 = -3 - \sin 1 < 0$

$h(2) = 2^4 - \frac{4}{2} - \sin 2 = 14 - \sin 2 > 0$

Comme $h(1) \cdot h(2) < 0$

$\Rightarrow 0 \in h(I)$

D'après T.V.I

$\exists x_0 \in I \Rightarrow h(x_0) = 0$

$f(x_0) - \sin x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = \sin x_0$

-Donc l'équation admet une solution de x_0.

Exercice 5

Soit f la fonction de variable réelle définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x)=\cos x$.

1) Démontrer que f réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Construire dans le même repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.

4) Démontrer que $f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=\pi$ pour tout x de J. Interpréter graphiquement

- Solution : 5

1) $f(x)=\cos x$, $x\in[0,\pi]$

f est définie, continue et dérivable sur $[0,\pi]$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\cos(0)=1$

* $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=f(\pi)=\cos(\pi)=-1$

* $f'(x)=-\sin x$

$-\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

* $k=0 \Rightarrow \boxed{x=0\ (\in[0,\pi])}$ * $k=2 \Rightarrow x=2\pi\ (>\pi)$

* $k=1 \Rightarrow \boxed{x=\pi\ (\in[0,\pi])}$ * $k=-1 \Rightarrow x=-\pi\ (<0)$

* T. Variation de f

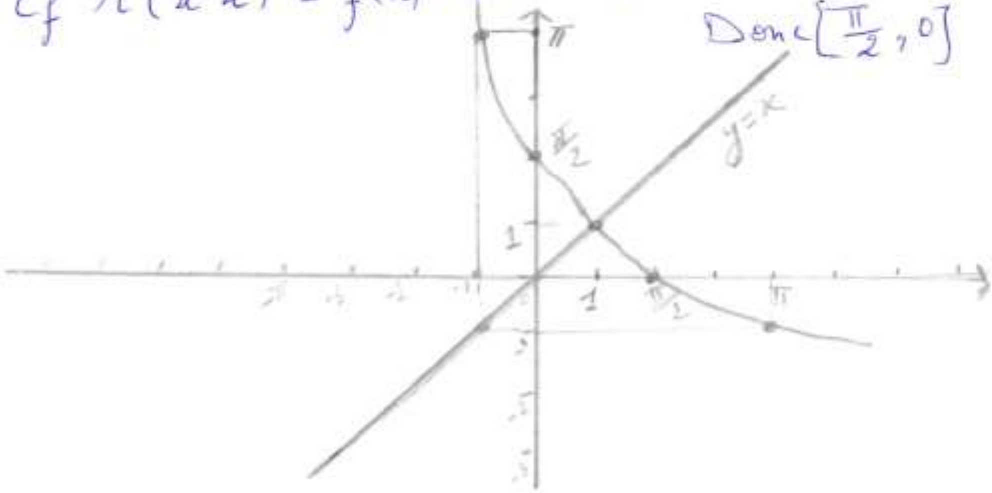
x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

- Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0,\pi]$, elle réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur l'intervalle $J=f([0,\pi])=[-1,1]$

2) $* \ \mathcal{C}_f \cap (y'y) = (0;1)$

$* \ \mathcal{C}_f \cap (x'x) = f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ x \in [0, \pi] \end{cases}$

Donc $[\frac{\pi}{2}, 0]$



3) Comme f est dérivable et comme sa dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$, la fonct° f^{-1} est donc dérivable sur $f(]0, \pi[) =]-1, 1[$

et $\forall x \in]-1, 1[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Or : $f'(y) = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-(f(y))^2}$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{-\sqrt{1-[f(f^{-1}(x))]^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{\text{Donc : } \forall x \in]-1, 1[\cdot (f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$

4°) $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = \pi$

$g'(x) = (f^{-1})(x)' = (f^{-1})(-x)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$g(x) = k$

$g(0) = f^{-1}(0) + f^{-1}(0)$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\Rightarrow \boxed{g(x) = \pi}$

Exercice 8 (D'après Bac)

Soit f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x) = 2\cos x$ et $g(x) = 1 + \sqrt{3}\cos x - \sin x$.
(C) et (C') leurs courbes représentatives respectives, dans le même repère orthonormé.
1) Etudier les variations de f et construire (C).
2) Démontrer que (C') est l'image de (C) par une transformation simple que l'on caractérisera.
3) Construire (C').

-Solution : 8

1) $f(x) = 2\cos x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

* $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi) = f(x)$

. Donc f est périodique de periode 2π, il suffit donc de l'étudier sur $[-\pi, \pi]$ or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 2\cos(-x)$
$= 2\cos x = f(x)$

- D'où f est paire
- Il suffit donc d'étudier sur $[0, \pi]$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2\cos(0) = 2 \times 1 = 2$

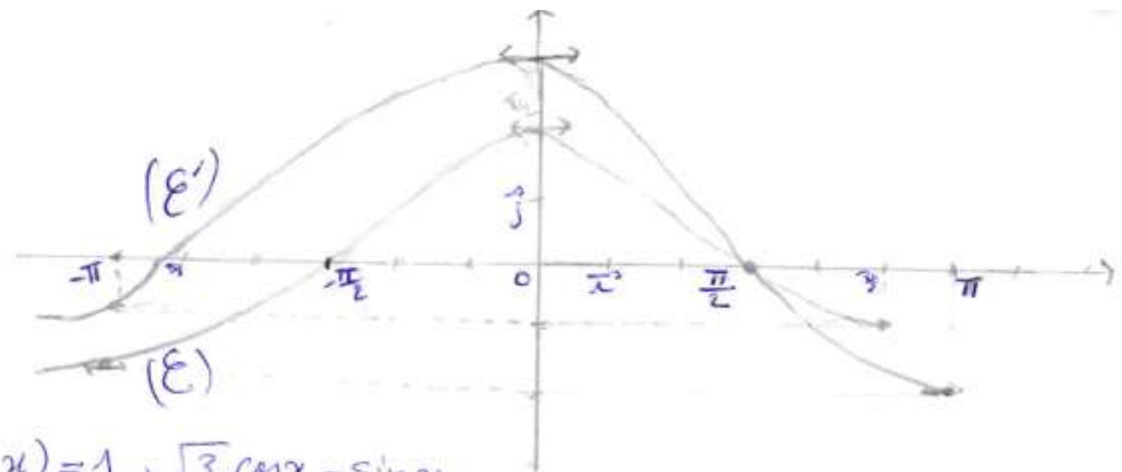
* $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = f(\pi) = 2\cos(\pi) = 2(-1) = -2$

* $f'(x) = -2\sin x \leq 0$ $\forall x \in [0, \pi]$
et $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

T. Variations de f :

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	-2

* $C_f \cap (y'y) - (0; 2)$
* $C_f \cap (x'x) . (\frac{\pi}{2}; 0)$



2) $g(x) = 1 + \sqrt{3}\cos x - \sin x$

$= 1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$

$= 1 + 2\left(\cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

- Donc : $\forall x \in \mathbb{R} . g(x) = 1 + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} . g\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 + f(x)$

$$\begin{cases} x' = x - \frac{\pi}{6} \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

. Donc (C') est l'image de (C) par la translation t de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\pi/6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

on translate le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ vers $(o,\vec{i},\vec{j})$ et on reproduit la courbe de f dans le nouveau repère pour obtenir la Courbe $\mathcal{C}_g$ Translation de vecteur $\vec{u}$.

EXERCICES

Exercice 1

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes:

$f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$

$f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^5} + 4x - 1$

$f_3(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$

$f_4(x) = 5x^3(x^4+1)^{2015}$

$f_5(x) = \tan^{2013} x + \tan^{2015} x$

$f_6(x) = \frac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$f_7(x) = x^3(x^4+1)^{2015}$

$f_8(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x}$

$f_9(x) = \frac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$

$f_{10}(x) = \frac{8x+8}{3\sqrt{x^2+2x+5}}$

* $f(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$

$F_1(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}\,2\sqrt{x} + \frac{5}{x} + 3x + C$

est une primitive de f_1 sur $]0;+\infty[$

* $f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^5} + 4x - 1$

$= 2x^{3/2} + 3x^{-5} + 4x - 1$

$F_2(x) = \frac{2}{3/2+1}x^{3/2+1} + \frac{3}{-5+1}x^{-5+1} + 2x^2 - x + C$

$= \frac{4}{5}\sqrt{x^5} - \frac{3}{4x^4} + 2x^2 - x + C$

est une primitive de f_2 sur $]0;+\infty[$

* $f_3(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$

$F_3(x) = \tan x - 7\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$

$= \tan x + \frac{7}{2}\cos 2x + C$

est une primitive de f_3 sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ $k \in \mathbb{Z}$

* $f_4(x) = 5x^3(x^4+1)^{2015} = \frac{5}{4}(4x)^3(x^4+1)^{2015}$

$= \frac{5}{4}\,u'(x)\,(u(x))^n$ avec $u(x) = x^4+1$ et $n = 2015$

Donc : $F_4(x) = \frac{5}{4}\left(\frac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right) + C$

est une primitive de f_4 sur $\mathbb{R}$

* $f_5(x) = \tan x^{2013} + \tan x^{2015} = \tan x^{2013}(1+\tan^2 x)$

$= u'(x).(u(x))^n$ avec $u(x)$ $\tan x$ et $n = 2013$

Donc $F_5(x) = \dfrac{\tan x^{2014}}{2014} + c$

est une primitive de f_5 sur $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ $k \in \mathbb{Z}$

* $f_6(x) = \dfrac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+x^2+2x+1}{(x^2(x+1)^2)} = \dfrac{3x^2+(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2}{x^2(x+1)^2} \cdot \dfrac{(x+1)^2}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2} \cdot \dfrac{1}{x^2}$

$F_6(x) = \dfrac{-3}{x+1} - \dfrac{1}{x} + c$

est une primitive de f_6 sur chacun des intervalles

* $f_7(x) = x^3(x^4+1)^{2015}$

$= \frac{1}{4}(4x)^3(x^4+1)^{2015}$

$F_7(x) = \frac{1}{4}\left(\dfrac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right) + c$

est une primitive de f_7 sur $\mathbb{R}$

* $f_8(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x} = \cos x\,(1+\sin x)^{1/2}$

$= u'(x)\,(u(x))^{1/2}$ ou $u(x) = 1+\sin x$

$F_8(x) = \dfrac{1}{1/2+1}.(1+\sin x)^{\frac{1}{2}+1} + c$

$= 2/3\,(1+\sin x)^{\frac{1}{2}+1} + c$

$= 2/3\sqrt{(1+\sin x)^3} + c$

est primitive de f_8 sur $\mathbb{R}$

(car $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+\sin x \geqslant 0$)

* $f_9(x) = \dfrac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{-2\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$

$= -\frac{3}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$ si $u(x)$ $3+2\cos x$

Donc : $F_9(x) = -\dfrac{3}{2} \times 2\sqrt{3+2\cos x} + c$

$\Rightarrow -3\sqrt{3+2\cos x} + c$

est une primitive de f_9 sur $\mathbb{R}$

(car $3+2\cos x \geqslant 1 > 0$) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_{10}(x) = \frac{8x+8}{3\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{4}{3}\left(\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\ \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{où} \quad u(x) = x^2+2x+5$$

$$F_{10}(x) = \frac{4}{3} \times 2\sqrt{x^2+2x+5} + C$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{x^2+2x+5} + C$$

est une primitive de f_{10} sur IR
(car $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 \geq 4 > 0$) $\forall x \in$ IR

Exercice 3

On pose, pour tout entier naturel n non nul: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$
1) Montrer que f admet une primitive sur IR et déterminer sa primitive F telle que F(0)= 1.
2) Ecrire F(x) sous la forme d'un quotient en déduire une expression simple de f(x).

Solution

$f_1(x) = 1+2x+3x^2+\dots nx^{n-1}$

1) comme $f(x)$ est une fonction polynôme, elle est continue sur IR et admet des primitive sur IR

Donc : $F(x) = x+x^2+x^3\dots+x^n+C$
est une primitive de C sur IR

$F(0) = 1 \implies C = 1$

D'où $F(x) = 1+x+x^2+x^3+\dots x^n$
est la primitive de f sur IR telle que $F(0)=1$

2) F(x) est la somme des (n+1) premières terme d'une S.G de raison $q = x$ et de premier terme 1

Donc : Si $x \neq 1$ alors $F(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

D'où $\forall x \neq 1$ $f(x) = F'(x)$

$$= \frac{-(n+1)x^n\cdot(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Donc : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2} \\ f(1) = 1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} \end{cases}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+\tan^{2012}x}, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue, positive, décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrer que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a: $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$.

3) Interpréter le résultat précédent graphiquement. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+\tan x^{2012}} ; & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

Montrons que f est positive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

$\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\tan x\geq 0 \Rightarrow \tan x^{2012}\geq 0$

$\Rightarrow 1+\tan x^{2012}>0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+\tan x^{2012}}>0$

Donc : $\boxed{\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[\ , f(x)>0}$ (1)

D'autre part . $\boxed{f(\frac{\pi}{2})=0}$ (2)

on a de (1) et (2) $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)\geq 0$

Donc :

f est positive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

Montrons que f est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

sur $[0,\frac{\pi}{2}[$, $f(x)=\dfrac{1}{1+\tan x^{2012}}$

inverse d'une fonction continue et qui ne s'annule pas sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

Donc :

$\boxed{f \text{ est continue sur }]0,\frac{\pi}{2}[}$ (3)

Montrons que f est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

on a $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\underbrace{1 + \tan x^{2012}}_{+\infty}} = 0$

Donc : $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$

D'où f est continue à gauche $\frac{\pi}{2}$

De (3) et (4) on a

f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Montrons que f est $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $f x = \frac{1}{1 + \tan x^{2012}}$

inverse d'une fonction dérivable et qui s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$f'(x) = \frac{-2012(1 + \tan x^2)\tan x^{2011}}{(1 + \tan x^{2012})^2} \leq 0$

D'où f est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et comme f est decroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

Donc :

f est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

2) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x)$

$= \frac{1}{1 + \tan_x^{2012}} + \frac{1}{1 + (\tan(\frac{\pi}{2} - x))^{2012}}$

$= \frac{1}{1 + \frac{\tan x^{2012}}{\cos x^{2012}}} + \frac{1}{1 + \frac{\cos x^{2012}}{\sin x^{2012}}}$

$= \frac{1}{\frac{\cos x^{2012} + \tan x^{2012}}{\cos^{2012}}} + \frac{1}{\frac{\tan x^{2012} + \cos x^{2012}}{\sin x^{2012}}} + \frac{1}{\cos x^{2012} + \sin x^{2012}}$

$= \frac{\cos x^{2012} + \sin x^{2012}}{\cos x^{2012} + \sin x^{2012}} = 1$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1 - t^2}\,dt$.

1) Montrer que f est une fonction affine.

2) Donner l'expression de f(x).

$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\, dt \quad ; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

① $f'(x) = (\sin x)' \sqrt{1-\sin^2 x} - (\cos x)' \cdot 1 - \cos^2 x \sqrt{1-\cos^2 x}$

$= \cos x \sqrt{\cos^2 x} - (-\sin x)\sqrt{\sin^2 x}$

$f'(x) = \cos x |\cos x| + \sin x |\sin x|$

$x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$

$\Rightarrow f'(x) = \cos^2 x + \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = 1 ; \boxed{f(x) = x + k ; k \in \mathbb{R}}$

② $f(\frac{\pi}{4}) = \int_{\cos\frac{\pi}{4}}^{\sin\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-t^2}\, dt$

$= \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-t^2}\, dt = 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{\pi}{4}$

D'où $\boxed{f(x) = x - \frac{\pi}{4}}$

Exercice 9

Soit la fonction définie par: $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n on pose: $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1) Calculer $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$ et montrer que: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que: $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$.

4) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.

1) $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = -\int_0^1 (-1)(1-x)^{1/2}\, dx$

$= -\int_0^1 u'(x)(u(x))^{1/2}\, dx$

où $u(x) = 1-x$

Donc : $I_0 = -\left[\frac{(1-x)^{1/2+1}}{1/2+1}\right]_0^1 = -\left[\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1$

$= -\left(0-\frac{2}{3}\right) = +\left(-\frac{2}{3}\right)$ ∴ $\boxed{I_0 = 2/3}$

$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$

$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$\Longrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$

Et multipliant par x^n $(x^n \geq 0)$

$\forall x \in [0, 1]$ on a :

$0 \leq x^n\sqrt{1-x} \leq x^n$ donc :

$0 \leq \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx$

D'où : $0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

donc : $0 < I_n \leq \frac{1}{n-1} - 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{N}$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$

2) $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx$ et $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\, dx$

on a $0 \leq x \leq 1$

et en multipliant par $x^n\sqrt{1-x}$

$(x^n\sqrt{1-x} \geq 0\ ;\ \forall x \in [0; 1])$

on obtient :

$0 \leq x^{n+1}\sqrt{1-x} \leq x^n\sqrt{1-x}$

D'où $0 \leq \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\, dx \leq \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx$

Donc $\forall x \in \mathbb{N}$ $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

D'où f est positive et décroissante et comme (U_n) est minorée par (0) et (U_n) convergente et comme

$\forall x \in \mathbb{N}$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le T.S

on a $\lim_{x \to +\infty} I_n = 0$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(x) = n x^{n-1} \\ v(x) = \frac{-2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$\int_0^1 u(x)\, v'(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} \left(-\frac{2}{3}\right)(1-x)\sqrt{1-x}\, dx$

$I_n = -0 + 0 + \frac{2n}{3}$

$\int_0^1 x^{n-1} (1-x)\sqrt{1-x}\, dx$

$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 (x^{n-1} - x^n)\sqrt{1-x}\, dx$

$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 \left(x^{n-1}\sqrt{1-x} - x^n \sqrt{1-x}\right) dx$

$I_n = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)$

$3I_n = 2n\, I_{n-1} - 2n\, I_n$

$2n\, I_n + 3I_n = 2n\, I_{n-1}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n+3)\, I_n = 2n\, I_{n-1}}$

4) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$

$I_n = \frac{2^{2n+2}(n!)(n+1)!}{(2n+3)!}$

nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(2K+3)\, I_K = 2K\, I_{K-1}$

c.a.d

$\forall K \in \mathbb{N}, \; I_K = \frac{2K}{2K+3} I_{K-1}$

Et en appliquant cette relation pour allant de 1 jusqu'au n on obtient :

$I_1 = \frac{2}{5} I_0$

$I_2 = \frac{4}{7} I_1$

$I_3 = \frac{6}{9} I_2$

$\vdots$

$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$

Exercice 11

Soit f la fonction d'une variable réelle x définie par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et représenter Γ. Montrer que Γ est un arc d'un cercle C à préciser.

2) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$. Donner sa valeur sans calculs.

3) En posant $x=\cos t$, calculer I et comparer avec le résultat précédent.

Solution:

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

1) $x\in D_f \Rightarrow 1-x^2\geq 0$

$\Rightarrow (1-x)(1+x)\geq 0$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x$	$-$	0	$+$	0	$-$

$D_f=[-1,1]$

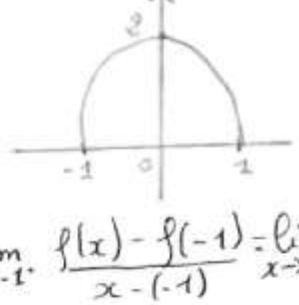
$f(-1)=0$, $f(1)=0$

$\forall x\in\,]-1,1[$

$f(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

le signe de f est ~~ad~~ celui de $-x$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}\times\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x}}$

$\lim\dfrac{1-x^2}{(x+1)\sqrt{1-x}}=\lim\dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-4}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

$\mathcal{C}$ admet au point $A(-1,0)$ une demi ~~cercle~~ tangente verticale dirigé vers le haut de même $\mathcal{C}$ admet une ~~d~~ demi tangente verticale au pt $B(1;0)$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$y=\sqrt{1-x^2}\quad y\geq 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ est un demi cercle de centre O et de rayon 1

2) $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

I est l'aire d'un quart de cercle $\mathcal{C}(0,1)$

$I=\dfrac{R\times R\times\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{I=\dfrac{\pi}{4}}$

3) $x=\cos t$

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \cos t=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\ x=1\Rightarrow \cos t=1\Rightarrow t=0\\ dx=-\sin t\,dt\end{cases}$

$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)dt$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t}\,\sin t\, dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$

$= \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 13

1) Montrer que pour tout entiers naturels non nuls m et n : $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

2) En déduire que :

$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1}$

Solution:

$\int_0^1 x^n(1-x)\,dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

On pose $t = 1-x \Rightarrow x = 1-t$

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$n = 1 \Rightarrow t = 0$

$dt = -dx \Rightarrow dx = (-dt)$

$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_1^0 (1-t)\,t^n(-dt)$

$= \int_0^1 t^m(1-t)^n dt$

$= \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

2) $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^n \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m}^{m-k} (1(-x)^k)\,dx$

$\sum_{k=0}^{m} C_m^k \int_0^1 x^n(-1)^k x^k\, dx$

$\sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k \int_0^1 x^{n+k} dx$

$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k \left[\frac{1}{n+k+1} x^{n+k+1}\right]_0^1$

$\sum_{k=0}^{m} = C^k \frac{(-1)}{n+k+1}$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$$

Exercice 15 :

1) Trouver I_{n+1} en fonction de I_n : a) $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$; b) $I_n=\int_0^1 \frac{t^{2n+1}\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$

2) Trouver I_{n+2} en fonction de I_n : a) $I_n=\int_0^1 \frac{t^n\,dt}{1+t^2}$; b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\,dt$;

c) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,dt$

Solution :

1)a) $I_{n+1}=\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt$

On pose $\begin{cases} u(t)=t^{n+1} \\ v'(t)=\sqrt{1-t} \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(t)=(n+1)t^n \\ v(t)=-\frac{2}{3}(1-t)\sqrt{1-t} \end{cases}$

$\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt=[u(t)v(t)]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt$

$\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt=[-\frac{2}{3}t^{n+1}(1-t)\sqrt{1-t}]_0^1-\int_0^1 (n+1)t^n\times(-\frac{2}{3})(1-t)\sqrt{1-t}\,dt$

$I_{n+1}=-0+0+\frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 t^n(1-t)\sqrt{1-t}\,dt$

$I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 (t^n-t^{n+1})\sqrt{1-t}\,dt$

$I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 (t^n\sqrt{1-t}-t^{n+1}\sqrt{1-t})\,dt$

$I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{3}\left(\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt-\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt\right)$

$I_n=\frac{2(n+1)}{3}(I_n-I_{n+1})$

$3I_{n+1}=(2n+2)I_n-(2n+2)I_{n+1}$

$(2n+2)I_{n+1}+3I_{n+1}=(2n+2)I_n$

$(2n+2+3)I_{n+1}=(2n+2)I_n$

$(2n+5)I_{n+1}=(2n+2)I_n$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{N}\quad I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+5}I_n}$

b) $I_{n+1}=\int_0^1 \frac{t^{2(n+1)+1}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

$I_{n+1}=\int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

$I_{n+1}=\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\times t^{2n+2}\,dt$

On pose $\begin{cases} u(t)=t^{2n+2} \\ v'(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(t)=(2n+2)t^{2n+1} \\ v(t)=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

$\int_0^1 u(t)v(t)\,dt=[u(t)v(t)]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt$

$\int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}=[t^{2n+2}\sqrt{1-t^2}]_0^1-\int_0^1 (2n+2)t^{2n+1}\sqrt{1+t^2}\,dt$

$I_{n+1}=\sqrt{2}-0-(2n+2)\int_0^1 t^{2n+1}\sqrt{1+t^2}\,dt$

$I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)\int_0^1 t^{2n+1}\sqrt{1+t^2}\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt$

$I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)\int_0^1 \frac{t^{2n+1}(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

$I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)\int_0^1 \frac{t^{2n+1}+t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

$I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)\int_0^1 \left(\frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt$

$I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)\left(\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt+\int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right)$

$I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)(I_n+I_{n+1})$

$I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)I_n-(2n+2)I_{n+1}$

$(2n+2)I_{n+1}+I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)I_n$

$(2n+3)I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)I_n$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{N}\quad I_{n+1}=\frac{1}{2n+3}-\frac{2n+2}{2n+3}I_n}$

2)a) $I_{n+2}=\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2}\,dt$

$I_n+I_{n+2}=\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt+\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2}\,dt$

$=\int_0^1 \frac{t^n+t^{n+2}}{1+t^2}\,dt$

$=\int_0^1 \frac{t^n(1+t^2)}{(1+t^2)}\,dt=\int_0^1 t^n\,dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$=\frac{1}{n+1}-0=\frac{1}{n+1}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{N}\quad I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$

C.à.d $\boxed{\forall x\in\mathbb{N}\quad I_{n+2}=\frac{1}{n+1}-I_n}$

b) $I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2}\sin t\,dt$

On pose $\begin{cases} u_1(t)=t^{n+2} \\ v'(t)=\sin t \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u_1'(t)=(n+2)t^{n+1} \\ v_1(t)=-\cos t \end{cases}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(t)v_1'(t)\,dt=[u_1(t)v_1(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1'(t)v_1(t)\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2}\sin t\,dt = \left[-t^{n+2}\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1}\cos t\,dt$

$I_{n+2} = -0+0+(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1}\cos t\,dt$

$\boxed{I_{n+2} = (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1}\cos t\,dt \quad (1)}$

on pose $\begin{cases} u_1(t) = t^{n+1} \\ v_1'(t) = \cos t \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u_1'(t) = (n+1)t^n \\ v_1(t) = \sin t \end{cases}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(t)v_1'(t)\,dt = \left[u_1(t)v_1(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1'(t)v_1(t)\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1}\cos t\,dt = \left[t^{n+1}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n\sin t\,dt$

$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1}\cos t = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n \quad (2)}$

De (1) et (2) on a

c) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}\,dt$

on pose $\begin{cases} u(t) = (\sin t)^{n+1} \\ v'(t) = \sin t \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(t) = (n+1)\cos t\,(\sin t)^n \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(t)v_1'(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t)\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}\,dt = \left[-\cos t(\sin t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(\sin t)^n\,dt$

$= -0+0+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)(\sin t)^n\,dt$

$= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}\,dt\right)$

$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$

$(n+1)I_{n+2} + I_{n+2} = (n+1)I_n$

$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{N} : I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$

:

Exercice 17

Soient a et b deux entiers naturels. On pose : $I(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta dt$

1) Calculer $I(\alpha,0)$.

2) On suppose que $\beta\geq 1$. À l'aide d'un intégration par parties, démontrer que :

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\alpha+1}I(\alpha+1,\beta-1)$$

3) En déduire que : $I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta)!}I(\alpha+\beta;0)$, puis que: $I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$.

Solution:

$I(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta dt$

$\alpha,\beta\in\mathbb{N}$

1) $I(\alpha,0)=\int_0^1 t^\alpha dt$

$=\left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right]_0^1$

$\boxed{I_{\alpha,0}=\frac{1}{\alpha+1}}$

2) On utilise une I.P.P

On pose: $\begin{cases}u'(t)=t^\alpha\\ v(t)=(1-t)^\beta\end{cases}$

Alors $\begin{cases}u(t)=\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\\ v'(t)=-\beta(1-t)^{\beta-1}\end{cases}$

$\int uv'=[uv]-\int u'v$

$I(\alpha,\beta)\left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}(1-t)^\beta\right]_0^1-\int_0^1\frac{-\beta}{1+\alpha}t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt$

$=0+\frac{\beta}{1+\alpha}\int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt$

$\boxed{I(\alpha,\beta)\ \frac{\beta}{1+\alpha}\ I(\alpha+1,\beta-1)}$

3) On écrit* pour différentes valeurs

$\begin{cases}I(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\alpha+1}I(\alpha+1,\beta-1)\\ I(\alpha+1,\beta-1)=\frac{\beta-1}{\alpha+2}I(\alpha+2,\beta-2)\\ I(\alpha+2,\beta-2)=\frac{\beta-2}{\alpha+3}I(\alpha+3,\beta-3)\\ I(\alpha+9,\beta-9)=\frac{1}{\alpha+\beta}I(\alpha+\beta,0)\end{cases}$

par produit membre à membre:

$I(\alpha,\beta)=\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\times\cdots\times 1}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\times\cdots(\alpha+1)}$

$I(\alpha,\beta)=\frac{\beta!\,\alpha!}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\times\cdots(\alpha+1)\alpha!}I(\alpha+\beta,0)$

$\boxed{I(\alpha,\beta)=\frac{\beta!\,\alpha!}{(\alpha+\beta)!}I(\alpha+\beta,0)}$

On remplace d'après (n):

$I(\alpha+\beta,0)=\frac{1}{\alpha+\beta+1}\sum_{K=0}^{n}I_{K,n}=1\Rightarrow$

Donc

$I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta)}\times\frac{1}{\alpha+\beta+1}\times(n+1)I_{K,n}=1\Rightarrow$

$\boxed{I_{K,n}=\frac{1}{n+2}}$

$\boxed{I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}}$

Exercice 19

L'objet du problème est de décrire une méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale: $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$.

1) Transformation de J

Pour tout élément $u\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, on pose $F(u)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{\sin t}{t}dt$ et, pour tout élément $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on pose $G(x)=\int_{0}^{x}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$.

a) Prouver que, pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$: $G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))$.

(On pourra comparer les dérivées des deux membres.)

b) En déduire que: $J=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$.

2) Approximation de J

Soit (U_n) la suite définie par $U_0=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sin\pi t\,dt$ et, si $n\geq1$, $U_n=\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^n\sin\pi t\,dt$.

a) Prouver que, pour tout $n\geq1$: $J=U_0+U_1+\cdots+U_{n-1}+r_n$ où $r_n=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}dt$.

b) Etablir que: $\forall t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$; $\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}\leq2t^n$. En déduire une majoration simple de r_n.

c) Montrer que $J=\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0+U_1+\cdots+U_{n-1})$.

3) Calcul des intégrales U_n

a) Calculer U_0 et U_1.

b) Etablir que, pour tout $n\geq2$: $U_n=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}}-n(n-1)U_{n-2}\right)$.

4) Conclusion

A partir des résultats obtenus en 2) et 3), indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision de 10^{-2}. (On ne demande pas d'effectuer ce calcul.)

Solution:

$J=\int_{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

1)a) on a $G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))$

on a : $Gx=\int_0^x\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$

$G'(x)=1\ \frac{\sin\pi x}{1-x}-0$

$G'(x)=\frac{\sin\pi x}{1-x}$

$F(\pi)-F(\pi(1-x)'=\pi F'(\pi(1-x))$ on

on a $F(u)\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{\sin t}{t}dt$

$F'(u)=\frac{\sin u}{u}$

$F'(\pi(1-x)=\frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)}$

$=\frac{\sin(\pi-\pi x)}{\pi(1-x)}=\frac{\sin\pi x}{\pi(1-x)}$

$F(\pi)-f\pi(1-x))=\pi\times\frac{\sin\pi x}{\pi(1-x)}$

$=\frac{\sin\pi x}{1-x}=G(x)$

donc $G(x)=F(\pi)(1-x))+K$

Pour $x=0$; $G(0)=f(\pi)-f(\pi)+K$

$0 = K \Rightarrow G(x) = F(x) = F(x) - f(\pi(1-x))$

b) Mq $J = f(\pi)$

$J = G(x) + f(\pi(1-x))$; pour $x = \frac{1}{2}$

$J = G(\frac{1}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$

$J = G(\frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} \frac{\sin \pi t}{1-t}\, dt$

2) $u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi t\, dt$

$\forall x \geq 1$; $u_n = \int_0^{1/2} t^n \sin \pi t\, dt$

Mq : $\forall n \geq 1$; on a :

$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + r_n$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi\, dt + \int_0^{1/2} t \sin \pi t\, dt + \dots + \int t \sin \pi dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 + t^1 + t^2 + \dots + t^{n-1}) \sin \pi t\, dt + \int_0^{1/2} \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \times \frac{1-t^n}{1-t} \sin \pi t + \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \frac{\sin \pi t}{1-t}\, dt$

$= \int_0^{t} \frac{\sin \pi t - t^n \sin \pi t}{1-t} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin t}{1-t}\, dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi t}{1-t}\, dt = J$

donc : $J = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + r_n$

b) Mq $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $\frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leq 2t^n$

$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \pi t \leq \frac{\pi}{2}$

$\boxed{0 \leq \sin \pi t \leq 1}$ ①

$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -t \leq 0$

$1 - \frac{1}{2} \leq 1 - t \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - t \leq 1$

$1 \leq \frac{1}{1-t} \leq 2 \Rightarrow t^n \leq \frac{t^n}{1-t} \leq 2t^n$ ②

① x ② $0 \leq \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leq 2t^n$

$\Rightarrow \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leq 2t^n$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin \pi t}{1-t}\, dt \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t^n\, dt$

$r_n \leq 2 \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$r_n \leq 2 \left(\frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

or $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 1$

2) $\frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$

$r_n \leq \frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$

$r_n \leq \frac{2}{n+1}$

2) $\frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$

on a $0 \leq r_n \leq \frac{2}{n+1}$

$\lim_{x \to +\infty} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$

D'après T.g $\lim_{x \to +\infty} r_n = 0$

or $J = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + r_n$

Par passage à la limite

$J = \lim_{+\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) + 0$

$u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi t\, dt = \left[-\frac{1}{4} \cos \pi t\right]_0^{1/2}$

$= -\frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \cos \Rightarrow u_0 = \frac{1}{4}$

$u_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t \sin \pi t\, dt$

I.P.P : $\begin{cases} u = t \\ v' = \sin \pi t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v(t) = -\frac{1}{\pi} \cos \pi t \end{cases}$

$u_1 = \left[-\frac{t \cos \pi t}{\pi}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi\, dt$

$u_1 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} - 0\right)$

$u_1 = \frac{1}{\pi^2}$

b) on a : $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin \pi t\, dt$

I.P.P : $\begin{cases} u(t) = t^n \\ v'(t) = \sin \pi t \end{cases} \Rightarrow u'(t) = nt^{n-1}$, $v(t) = -\frac{1}{\pi} \cos \pi t$

$u_n = \left[\frac{t}{n} \cos \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1} \cos \pi t\, dt$

$u_n = \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1} \cos \pi t\, dt$

I.P.P : $\begin{cases} u(t) = t^{n-1} \\ v'(t) = \cos \pi t \end{cases}$

$\begin{cases} u'(t) = (n-1) t^{n-2} \\ v(t) = \frac{1}{\pi} \sin \pi t \end{cases}$

$u_n = \frac{n}{\pi} \left(\left[\frac{t^{n-1}}{\pi} \sin \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{(n-1)}{\pi} \int_0^{1/2} t^{n-2} \sin \pi t\, dt \right)$

$u_n = \frac{n}{\pi} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\pi} - \frac{(n-1)}{\pi} u_{n-2} \right)$

$u_n = \frac{1}{\pi^2} \left(n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n(n-1) u_{n-2} \right)$